Espaces de Hilbert

§1. Introduction

Espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- opérations d'addition et de multiplication (par $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- exemples :
  - i). notre espace 3D (ou 2D)
  - ii). $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
  - iii). fonctions sur $\mathbb{R}$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $C^k(I)$, ...
- nous avons la notion de dépendance/indépendance linéaire : k vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ ne sont pas indépendants s'il existe une combinaison linéaire

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = 0 \quad \text{avec au moins un } \lambda \neq 0$$

dimension = nombre maximal de vecteurs non-nuls linéairement indépendants

$$\dim \mathbb{R} = 1$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

$$\dim C^\infty(\mathbb{R}), C_0^\infty(\mathbb{R}), C^k(I) = \infty$$

- on s'intéresse principalement aux espaces de $\dim = \infty$. Même dans les cas les plus simples ça pose des problèmes, car
  - i). par analogie avec 3D, on aimerait introduire une <u>base</u> de notre espace
    - $\dim < \infty$

      $\forall$ vecteur : $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$

      $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ - coordonnées de ce vecteur

      $\forall$ 2 bases sont reliées par une transformation linéaire :

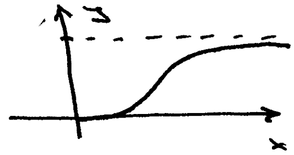
$$\begin{matrix} \vec{v}_1{}' = a_{11}\vec{v}_1 + \dots + a_{1k}\vec{v}_k \\ \dots \\ \vec{v}_k{}' = a_{k1}\vec{v}_1 + \dots + a_{kk}\vec{v}_k \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{pmatrix}$$

et réciproquement (A^{-1} existe, sinon $\det A = 0$, mais cela équivaut à la dépendance linéaire de lignes de A (et donc de $\vec{v}_j$) $\Rightarrow$ $\{\vec{v}_j\}$ ne forment pas une base).

- dim $= \infty$:

  ∞ vecteurs indépendants n'est pas forcement une base

  <u>Exemple:</u> $f(x) = e^{-1/x^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$

  base $1, x, x^2, \ldots$?

  série de Taylor en $x=0$ $\equiv 0 \neq e^{-1/x^2}$

  ce qui est encore moins bien:

  * $\sum^{\infty} a_n \vec{v}_n$ doit avoir un sens,
  * même si on arrive à trouver 2 bases elles ne sont pas forcement équivalentes.

On s'intéresse plus particulièrement à l'approximation des fonctions.

- comment ça marche pour les nombres réels?

$$e = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + \frac{1}{1!}}_{2} + \frac{1}{2!}}_{2,5} + \frac{1}{3!}}_{2,67} + \ldots$$

ou

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nombres transcendants $\cup$ nombres rationnels

$n=1: \quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$n=2: \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$

$n=3: \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,37$

$\ldots$

- même chose pour les fonctions? (éléments des espaces vectoriels de dim $=\infty$). Possible si on définit la convergence. Pour ceci on a besoin d'introduire une "distance" entre 2 vecteurs (fonctions). Ceci nous amène à la définition d'une norme.

Déf. 1 Soit V un espace vectoriel (E.V. dans la suite) complexe. Une norme sur V est une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, possédant les propriétés suivantes

1). $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

2). $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

3). $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

4). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La dernière propriété s'appelle l'inégalité triangulaire

Il en résulte que $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance invariante par translations.

Déf. 2 Un espace vectoriel normé (E.V.N.) est un espace vectoriel muni d'une norme.

Déf. 3 Soit V un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur V. Ces deux normes sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $a > 0$, $b > 0$ telles que

$$\|x\|_1 \leq a \|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \cdot b \qquad \forall x \in V.$$

Avec une norme, on peut définir ce que c'est la convergence:

Déf. 4 Une suite de vecteurs $\{x_n\}$ dans un E.V.N. V est dite convergente vers $x \in V$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tel que $n \geq n_0$ implique $\|x - x_n\| < \varepsilon$. On écrit dans ce cas $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Déf. 5 Une suite de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans V est une suite infinie de vecteurs telle que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tel que $n \geq n_0, m \geq n_0$ implique $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Prop. 6 Toute suite convergente est de Cauchy.

▼ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{n}_0$ tel que $\forall n \geq \tilde{n}_0$ on a $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall m, n \geq \tilde{n}_0$ on a

$$\|x_m - x_n\| = \|(x_m - x) + (x - x_n)\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

▲

Remarque 7. Dans $\mathbb{R}$, nous avons aussi la réciproque : toute suite de Cauchy est convergente (dans un sens, ceci est lié à la construction de $\mathbb{R}$: on commence avec $\mathbb{Q}$, les nombres rationnels, ensuite on ajoute à $\mathbb{Q}$ toutes les limites des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, etc.).

Par conte, ce n'est pas vrai dans un E.V.N. quelconque.

Déf. 8 Soit V un E.V.N. Si toute suite de Cauchy dans V est convergente, on appelle V un E.V.N. complet ou un espace de Banach.

§2. Espaces de Hilbert

Déf. 9 Soit V un E.V. complexe. Un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ sur V est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, autrement dit vérifiant $\forall x, y, z \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

1). $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

2). $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$.

3). $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$ (notons que $(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$)

4). $(x, x) \geq 0$.

5). $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Prop. 10 Soit V un E.V. et $(\cdot,\cdot)$ un produit scalaire sur V. Alors on peut définir sur V une norme associée à ce produit scalaire par

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \qquad \forall x \in V$$

Toutes les propriétés de la norme, sauf l'inégalité triangulaire, sont évidentes. Pour démontrer cette dernière, montrons d'abord l'inégalité de Schwarz :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

En effet, $\forall x, y \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + (x, \lambda y) + (\lambda y, x) + (\lambda y, \lambda y) =$$

$$= (x, x) + |\lambda|^2 (y, y) + 2 \operatorname{Re} (x, \lambda y).$$

Donc :

(1) $$-2\,\mathrm{Re}\,(x, \lambda y) \leq (x,x) + |\lambda|^2 (y,y)$$

Posons dans cette dernière équation

$$\lambda = -\frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}\,\frac{\|x\|}{\|y\|} \Longrightarrow |\lambda|^2 = \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2}$$

alors

$$-2\,\mathrm{Re}\,(x, \lambda y) = 2\,\mathrm{Re}\big((-\lambda)(x,y)\big) = 2\,\mathrm{Re}\left((x,y)\cdot\frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}\,\frac{\|x\|}{\|y\|}\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(|(x,y)|\cdot\frac{\|x\|}{\|y\|}\right) = 2\,|(x,y)|\,\frac{\|x\|}{\|y\|}$$

$$(x,x) + |\lambda|^2 (y,y) = \|x\|^2 + |\lambda|^2\,\|y\|^2 = \|x\|^2 + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2}\cdot\|y\|^2 = 2\|x\|$$

et donc (1) implique

$$2\,|(x,y)|\,\frac{\|x\|}{\|y\|} \leqslant 2\|x\|^2 \Longrightarrow \quad |(x,y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|,$$

d'où l'inégalité de Schwarz.

Ensuite considérons

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2$$

(d'après l'inégalité de Schwarz) $\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 =$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2,$$

d'où $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire) ▼

<u>Déf. 11.</u> Un espace préhilbertien est un E.V. muni d'un produit scalaire.
Un <u>espace de Hilbert</u> est un espace préhilbertien qui est complet par rapport à la norme associée au produit scalaire.

<u>Exemple 12.</u> L'espace ℓ^2 de toutes les suites infinies $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = x$ de nombres complexes tels que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ ~~est~~ devient un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}\, y_n$$

Il s'avère (la preuve est difficile) que ℓ^2 est complet, donc c'est un espace de Hilbert.

<u>Exemple 13</u>. Soit $I = (a, b)$ une intervalle dans $\mathbb{R}$ (bornée ou non) et soit $\mu : I \to \mathbb{R}_{>0}$ une fonction continue strictement positive. L'ensemble des fonctions f telles que

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mu(x)\, dx < \infty$$

se note $L^2(I, \mu dx)$ (ou parfois $L^2(I, \mu)$) et est appelé l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure μdx.

- notons que $L^2(I, \mu dx)$ est un E.V.
- si $f, g \in L^2(I, \mu dx)$, définissons leur produit scalaire par
$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, \mu(x)\, dx$$
Muni de ce produit scalaire, $L^2(I, \mu dx)$ devient un espace préhilbertien. Il s'avère que $L^2(I, \mu dx)$ est complet, donc c'est un espace de Hilbert.
- les fonctions f considérées ici ne sont pas nécessairement continues (même par morceaux)
- lorsque $\mu = 1$, cet espace de Hilbert est noté $L^2(a, b)$ ($L^2(\mathbb{R})$ lorsque $I = \mathbb{R}$).

La réciproque de la Prop. 10 n'est pas vraie en général. Ça veut dire que, étant donné un E.V. V muni d'une norme $\|\cdot\|$, il n'est pas possible en général de définir sur V un produit scalaire compatible avec cette norme (c'est-à-dire, $(x, x) = \|x\|^2 \quad \forall x \in V$).

Dans ce cas, la norme devrait vérifier l'identité de parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

▼ $\{ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \left| \begin{array}{l} \text{pour la norme} \\ \text{compatible avec} \\ \text{le produit scalaire} \end{array} \right| = (x+y, x+y) + (x-y, x-y)$

$= (x, x) + \cancel{(x, y)} + \cancel{(y, x)} + (y, y) + (x, x) - \cancel{(x, y)} - \cancel{(y, x)} + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y) =$

$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ ▼

Pourtant il est simple de construire un contre-exemple de la norme pour laquelle cette égalité n'est pas vérifiée.

<u>Exemple 14</u>. Considérons l'espace $L^1(\mathbb{R})$, composé des fonctions $f(x)$ telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \overset{\text{def}}{=} \|f\| < \infty$$

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ deux fonctions continues vérifiant $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ (donc $\forall x$ soit $f(x)=0$ ou $g(x)=0$), alors

$$\|f \pm g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = \|f\| + \|g\|$$

et par conséquent

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 - 2\|f\|^2 - 2\|g\|^2 =$$

$$= 2(\|f\| + \|g\|)^2 - 2\|f\|^2 - 2\|g\|^2 = 4\|f\|\cdot\|g\| \neq 0,$$

donc l'identité de parallélogramme n'est pas vérifiée.